Методика решения задач на расчет электростатического поля в диэлектриках
1. Применение теоремы Гаусса.

Приведем необходимые формулы для последующих расчетов. Теорема Гаусса для векторов напряженности поля и электрической индукции:

$$\oint_S \boldsymbol{EdS} = \frac{1}{e_0}\oint_V (r + r')dV \qquad (1з)$$

$$\oint_S \boldsymbol{DdS} = \oint_V r\,dV \qquad (2з)$$

Напомню обозначения: r - плотность стороннего заряда, r' - плотность связанного заряда в диэлектрике. В любом диэлектрике суммарный связанный заряд равен нулю. В левой части формул интегрирование ведется по замкнутой поверхности некоторого объема, по которому ведется интегрирование в правых частях формул. При расчете мы будем пользоваться второй формулой, так как в рассмотренных ниже задачах будет известно только распределение стороннего заряда. Практическое применения этих формул ограничено задачами, в которых все физические величины имеют сферически симметричное, либо аксиальное распределения во всем пространстве. Поэтому в первом случае вектор индукции поля на любой сферической поверхности с центром, находящемся в центре симметрии, имеет одинаковое значение. Во втором случае эквипотенциальные поверхности являются цилиндрическими. Но в этом случае решение, вообще говоря, является приближенным. То есть полученные решения будут справедливы на расстояниях от оси много меньше длины цилиндра.

В задачах, обладающих необходимой симметрией, в силу постоянства вектора индукции интегралы превращаются в произведения ***проекции вектора индукции*** на площадь поверхности. Для сферически симметричных задач:

$$4p\,r^2 D_r = \oint_V r\,dV$$

$$D_r(r) = \frac{1}{4p\,r^2}4p\int_0^r r(r)r^2dr = \frac{1}{r^2}\int_0^r r(r)r^2dr \qquad (3з)$$

Для задач, ось симметрии (мы будем считать ее осью Z)^

$$2p\,R\Delta Z D_R = \Delta Z\oint_S r\,dS = 2p\Delta Z\int_0^R r(R)RdR$$

$$D_R(R) = \frac{1}{R}\int_0^R r(R)RdR \qquad (4з)$$

Далее находится напряженность электрического поля:

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{D_r(r)}{e_0 e}\boldsymbol{e}_r \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{E}(R) = \frac{D_r(R)}{e_0 e}\boldsymbol{e}_R \qquad (5з)$$

Во всех формулах r - модуль радиус – вектора, R - расстояние от оси симметрии.

В некоторых задачах кроме нахождения поля требуется найти распределение поверхностного и объемного связанного заряда. Поверхностный заряд находится совсем просто:

$$s' = \boldsymbol{Pn} = e_0(e-1)\boldsymbol{En} \qquad (6з)$$

Причем нормаль (единичный вектор) должна быть направлена наружу из диэлектрика, в котором находится поверхностный заряд.

Для отыскания объемного заряда, на мой взгляд, проще всего использовать формулу:

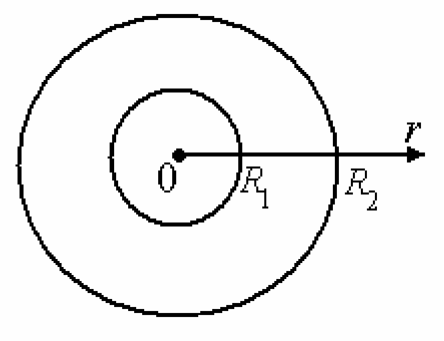
$$r' = -\frac{e-1}{e}r - \frac{e_0}{e}E_r\frac{\partial e}{\partial r} \qquad (7з)$$

Формула написана для сферически симметричных задач. Для задач с осевой симметрией следует заменить r на R. На этом закончим вводную часть и далее рассмотрим пару конкретных задач.

Сферическая симметрия. На рисунке показан в разрезе диэлектрический шар. В области $0 \le r \le R_1$ диэлектрик однородный $e = e_1 = const$, при $R_1 \le r \le R_2$ $e = \dfrac{e_1 - 1}{R_2 - R_1}(R_2 - r) + 1$. В первой области объемный заряд нарастает от нуля в центре до r_1 по линейному закону. Во второй, внешней области плотность объемного заряда постоянна и равна $r_2 = r_1$.
Определить напряженность электрического поля во всем пространстве и связанный заряд в диэлектрике.

Решение.

Начинаем с определения индукции электрического поля, начиная от центра шара.



Для области $0 \le r \le R_1$, согласно с (3з), имеем:

$$D_r(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r r_1 \frac{r}{R_1} r^2 dr = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r_1}{4R_1} r^4 = \frac{r_1}{4R_1} r^2 \qquad (8з)$$

Находим напряженность электрического поля:

$$\boldsymbol{E}_1(r) = \frac{D_r \boldsymbol{e}_r}{e_0 e_1} D = \frac{r_1}{4e_0 e_1 R_1} r^2 \boldsymbol{e}_r \qquad (9з)$$

Найдем распределение связанного заряда во внутренней области. Так как диэлектрик в ней однородный, то можно воспользоваться формулой (6з), ограничившись первым слагаемым:

$$r'(r) = -\frac{e_1 - 1}{e_1} r_1(r) = -\frac{e_1 - 1}{e_1} r_1 \frac{r}{R_1}$$

На поверхности первого диэлектрика возникнет поверхностный заряд, поверхностная плотность которого будет равна (6з):

$$s_1' = \boldsymbol{Pn} = e_0(e_1 - 1)\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{n}_1 = e_0(e_1 - 1)\frac{r_1}{4e_0 e_1 R_1} R_1^2 = \frac{e_1 - 1}{e_1}\frac{r_1 R_1}{4}$$

Найдем суммарный объемный заряд в первой области:

$$q_1' = -\frac{e_1 - 1}{e_1} r_1 \int_0^{R_1} \frac{r}{R_1} 4p\, r^2 dr = -p\, \frac{e_1 - 1}{e_1} r_1 R_1^3$$

Суммарный поверхностный заряд будет равен:

$$q_2' = \frac{e_1 - 1}{e_1}\frac{r_1 R_1}{4} 4p\, R_1^2 = p\, \frac{e_1 - 1}{e_1} r_1 R_1^3$$

Сумма поверхностного и объемного заряда, как и следует из его определения, равна нулю. Всегда при возможности следует проверять полученные решения, чтобы исключить ошибки.

Переходим к расчету во второй области при $R_1 \le r \le R_2$:

$$D_r(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^{R_1} r_1(r) r^2 dr + \frac{1}{r^2}\int_{R_1}^{r} r_1 r^2 dr = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r_1}{4} R_1^3 + \frac{1}{r^2}\frac{r_1}{4}(r^3 - R_1^3) = \frac{1}{r^2}\frac{r_1}{4} r^3 = \frac{r_1}{4} r \quad (10з)$$

Находим напряженность поля:

$$\boldsymbol{E}_2(r) = \frac{r_1}{4e_0\left[\dfrac{e_1 - 1}{R_2 - R_1}(R_2 - r) + 1\right]} r \boldsymbol{e}_r$$

Можно проверить вычисленные напряженности полей, используя граничные условия, Так как на поверхностях диэлектриков нет стороннего заряда, то индукция поля должна быть непрерывной функцией. Видно, что формулы (8з) и (10з) при $r = R_1$ совпадают:

$$D_{2r}(R_1) = D_{1r}(R_1),$$

Из непрерывности диэлектрической проницаемости $e_1(R_1) = e_2$ следует, что и напряженность поля должна быть непрерывной функцией. Чтобы проверить, что это действительно так:

$$\boldsymbol{E}_1(R_1) = \frac{D_r \boldsymbol{e}_r}{e_0 e_1} D = \frac{r_1 R_1}{4e_0 e_1} \boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{E}_2(R_1)=\frac{r_1}{4e_0[\frac{e_1-1}{R_2-R_1}(R_2-R_1)+1]}r\boldsymbol{e}_r=\frac{r_1R_1}{4e_0e_1}\boldsymbol{e}_r$$

Вычислим поверхностную плотность связанного заряда на внутренней поверхности второго диэлектрика:

$$s_2'(R_1)=e_0[e_2(R_1)-1]\boldsymbol{E}_2(R_1)(-\boldsymbol{n}_1)=-e_0(e_1-1)\frac{r_1R_1}{4e_0e_1}=-(e_1-1)\frac{r_1R_1}{4e_1}$$

Его, вообще говоря, можно было не вычислять. Он должен быть таким же по величине, как и заряд на внутреннем диэлектрике, но только отрицательным. Если бы это было не так, то напряженность поля терпела бы разрыв. Подметили, что очень многие результаты можно всегда проверить и выловить сделанные ошибки.

Полный поверхностный заряд будет равен:

$$q_3'=-(-\frac{e_1-1}{e_1}\frac{r_1R_1}{4})4p\,R_1^2=p\,\frac{e_1-1}{e_1}r_1R_1^3$$

Осталось для второй области найти распределение объемной плотности связанного заряда:

$$r'(r)=-\frac{e_2(r)-1}{e_2(r)}r_2(r)-\frac{e_0}{e_2}E_r\frac{\partial e_2(r)}{\partial r}=$$

$$=-\left\{\frac{\frac{e_1-1}{R_2-R_1}[(R_2-r)+1]-1}{\frac{e_1-1}{R_2-R_1}[(R_2-r)+1]}r_1+\frac{e_0}{\frac{e_1-1}{R_2-R_1}[(R_2-r)+1]}g\frac{r_1}{4e_0[\frac{e_1-1}{R_2-R_1}(R_2-r)+1]}rg(-\frac{e_1-1}{R_2-R_1})\right\}=$$

$$=-\frac{r_1}{\frac{e_1-1}{R_2-R_1}[(R_2-r)+1]}\left\{\frac{e_1-1}{R_2-R_1}[(R_2-r)+1]-1-\frac{e_1-1}{4[\frac{e_1-1}{R_2-R_1}(R_2-r)+1](R_2-R_1)}r\right\}$$

Получилось очень громоздкое выражение. Попробуйте его проинтегрировать по объему второго диэлектрика. У меня просьба. Если в последнем выражении я допустил опечатку, сообщите. К моему сожалению бывает. В результате должны получить

$$q_4'=-q_3'=-p\,\frac{e_1-1}{e_1}r_1R_1^3$$

На внешней границе второго диэлектрика поверхностного связанного заряда не будет, так как

$$s'(R_2):P_r(R_2):\frac{e_2(R_2)-1}{e_2(R_2)}E_r(R_2)=0\cdot E_r(R_2)$$

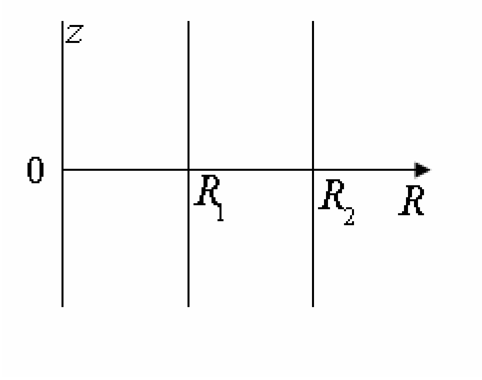
Вне шара при $r\ge R_2$ поле будет полем точечного заряда:

$$\boldsymbol{E}_3(r)=\frac{1}{4pe_0}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

Q - суммарный сторонний заряд в обоих диэлектриках:

$$Q=4p\int_0^{R_1}\frac{r_1}{R_1}r^3dr+4p\int_{R_1}^{R_2}r_1r^2dr=4p\,(\frac{r_1R_1^2}{4}+\frac{r_1(R_2^2-R_1^2)}{3})$$

Аксиальная симметрия.



На рисунке показана маленькая часть цилиндра. Ось Z - ось является осью цилиндра. Диэлектрическая проницаемость внутреннего цилиндра $0\le R\le R_1$ равна e_1, внешнего $R_1\le R\le R_2$ -e_2 величины постоянные. От $R=R_2$ вакуум. На оси Z расположен сторонний линейный заряд с плотностью $r_л$. Во внутреннем цилиндре стороннего объемного заряда нет, во внешнем цилиндре плотность объемного заряда равна r. На границе между цилиндрами нанесен равномерно

сторонний заряд плотностью s .
Найти напряженность поля во всем пространстве и связанные заряды в диэлектриках.

Решение.

Область $0 \le R \le R_1$. Находим индукцию поля:

$$2p R\Delta Z D_R(R) = r_л \Delta Z \ , \qquad D_R(R) = \frac{r_л}{2p R}$$

Напряженность поля в этой области будет равна:

$$\boldsymbol{E}(R) = \frac{r_л}{2pe_0 e_1 R}\boldsymbol{e}_R = \frac{r_л}{2pe_0 e_1 R^2}\boldsymbol{R}$$

Объемного связанного заряда во внутреннем цилиндре не образуется, так как диэлектрик однородный и стороннего объемного заряда в нем нет. Вычислим дипольный момент единицы объема:

$$P_R(R) = (e_1 - 1)E_R(R) = (e_1 - 1)\frac{r_л}{2pe_1 R}$$

На поверхности внутреннего цилиндра выступит поверхностный заряд, так как, например, при $r_л > 0$ диполи диэлектрика «высунут носики» на его поверхность. Поверхностная плотность связанного заряда будет равна:

$$s_1'(R_1) = (e_1 - 1)\frac{r_л}{2pe_1 R_1}$$

На единицу длины суммарный поверхностный заряд будет равен:

$$q_1'(R_1)_{\Delta Z=1} = \frac{(e_1 - 1)}{e_1} r_л$$

Точно такой же по величине, но со знаком минус создадут хвостики диполей на поверхности заряженной нити, которую мы приняли бесконечно тонкой:

$$q_1'(0)_{\Delta Z=1} = -\frac{(e_1 - 1)}{e_1} r_л$$

Перейдем к области $R_1 \le R \le R_2$, то есть к рассмотрению внешнего цилиндра (с полостью внутри). Индукция поля будет равна:

$$2p R\Delta Z D_R(R) = r_л \Delta Z + s\, 2p R_1 \Delta Z + \int_{R_1}^{R} r\, 2p R dR$$

$$D_R(R) = \frac{r_л}{2p R} + \frac{s R_1}{R} + \frac{r(R^2 - R_1^2)}{2R}$$

Находим напряженность поля:

$$\boldsymbol{E}(R) = \frac{1}{e_0 e_2}\left(\frac{r_л}{2p R} + \frac{s R_1}{R} + \frac{r R}{2}\right)\boldsymbol{e}_R$$

Найдем дипольный момент единицы объема:

$$P_R(R) = \frac{e_2 - 1}{e_2}\left(\frac{r_л}{2p R} + \frac{s R_1}{R} + \frac{r R}{2}\right)$$

Подставляя в последнею формулу R_1 и R_2, получим поверхностные плотности связанного заряда на внешнем цилиндре:

$$s_2'(R_1) = -\frac{e_2 - 1}{e_2}\left(\frac{r_л}{2p R_1} + s + \frac{r R_1}{2}\right)$$

$$s_2'(R_2) = \frac{e_2 - 1}{e_2}\left(\frac{r_л}{2p R_2} + \frac{s R_1}{R_2} + \frac{r R_2}{2}\right)$$

Обратите на знак минус в первой формуле.

Так как диэлектрик однородный, то объемная плотность связанного заряда в нем равна:

$$r' = -\frac{e_2 - 1}{e_2} r$$

Давайте подсчитаем для проверки весь заряд в вешнем цилиндре на единицу его длины:

$$q_2' = 2p R_1 s_2'(R_1) + 2p R_2 s_2'(R_2) + \int_{R_1}^{R_2} r' 2p R dR$$

$$q_2' = 2p \frac{e_2 - 1}{e_2}\{-R_1(\frac{r_{\text{л}}}{2p R_1} + s + \frac{r R_1}{2}) + R_2(\frac{r_{\text{л}}}{2p R_2} + \frac{s R_1}{R_2} + \frac{r R_2}{2}) - r(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2})\}$$

Из последнего выражения видно, что после приведения подобных членов, как и должно быть, мы получим нуль.

Перейдем к вычислению поля в вакууме при $R \geq R_2$. Индукция поля будет равна:

$$2p R \Delta Z D_R(R) = r_{\text{л}} \Delta Z + s\, 2p R_1 \Delta Z + \int_{R_1}^{R_2} r\, 2p \Delta Z R dR$$

$$D_R(R) = \frac{r_{\text{л}}}{2p R} + \frac{s R_1}{R} + \frac{r}{2R}(R_2^2 - R_1^2)$$

Находим напряженность поля:

$$\boldsymbol{E}(R) = \frac{1}{e_0 R}\{\frac{r_{\text{л}}}{2p} + s R_1 + \frac{r}{2}(R_2^2 - R_1^2)\}\boldsymbol{e}_R$$

Это выражение можно применять только при $R = H$, где H - длина цилиндра. При R **?** H можно применять формулу для поля точечного заряда, с суммарным сторонним зарядом этой системы. Чтобы его можно было вычислить должна быть известна длина цилиндра.

В заключение проверим безошибочность вычисления индукции поля, используя условия на границе. Как вам известно, что она непрерывна, если на границе раздела поверхностной плотность стороннего заряда равна нулю. Это условие реализуется при $R = R_2$. Вычислим индукцию на внешней границе внутри диэлектрика:

$$D_R(R_2) = \frac{r_{\text{л}}}{2p R_2} + \frac{s R_1}{R_2} + \frac{r(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2}$$

На границе индукция в вакууме будет равна:

$$D_R(R_2) = \frac{r_{\text{л}}}{2p R_2} + \frac{s R_1}{R_3} + \frac{r}{2R_2}(R_2^2 - R_1^2)$$

Выражения совпадают. Значит все пока правильно.

Проверим на границе между двумя диэлектриками. На внешней границе внутреннего цилиндра индукция равна:

$$D_R(R_1) = \frac{r_{\text{л}}}{2p R_1}$$

На внутренней границе внешнего цилиндра:

$$D_R(R_1) = \frac{r_{\text{л}}}{2p R_1} + \frac{s R_1}{R_1} + \frac{r(R^2 - R_1^2)}{2R_1} = \frac{r_{\text{л}}}{2p R_1} + s$$

Приращение индукции рано:

$$\frac{r_{\text{л}}}{2p R_1} + s - \frac{r_{\text{л}}}{2p R_1} = s$$

Как видите, и здесь сошлось. Еще раз рекомендую делать проверку задачи, если это возможно. Убережете себя от ошибок.

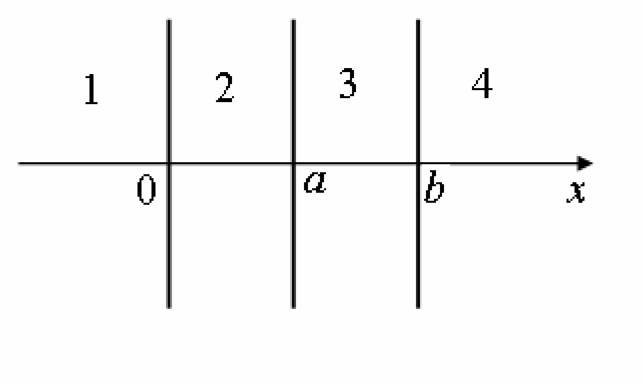
В виде заключения. Рекомендуемый порядок решения.: 1. Разбиваем пространство на характерные области. 2. Вычисляем $D_r \to E_r \to P_r \to s'$, $E_r, \frac{de}{dr} \to r'$ для всех областей, проще начинать с центра. 3. Делаем проверки. Желаю успеха на контрольной.

Одномерная геометрия (применение уравнения $\nabla \boldsymbol{D} = r$).

Мы ограничимся рассмотрением одномерной задачей, так как решение уравнений в частных производных будет по математике позже. В одномерном случае уравнение, приведенное в заголовке, сводится к обычному дифференциальному уравнению, решение которого вы умеете искать:

$$\frac{d}{dx}D_x(x) = r(x) \qquad (11з)$$

Рассмотрим конкретную типичную задачу на применение уравнения (11з).



Области 2 и 3 представляют собой диэлектрические пластины, которые при решении задачи будем считать бесконечными по координатам y и z. В области 2 диэлектрическая проницаемость постоянна и равна e_1, а плотность объемного заряда линейно нарастает:

$$r_1 = \frac{x}{a} r_0 \qquad (12з)$$

На поверхности диэлектрика при $x = 0$ нанесен поверхностный заряд плотностью $s = const$. В области 3 объемная плотность постоянна и равна $r_2 = r_0$. Диэлектрическая проницаемость в ней задана уравнением:

$$e_2 = e_1 - \frac{x}{2a} e_1 \qquad (13з)$$

Области 1 и 4 вакуум. Надо найти напряженность электрического поля во всех областях.

Решение.

Будем находить решения для каждой области независимо, затем эти решения надо «сшить», используя граничные условия и условия на бесконечностях (при $x = \pm\ \infty$).

1. $-\infty \le x \le 0$:

$$\frac{d}{dx}D_{1x}(x) = 0 \qquad D_{1x}(x) = D_{1x} = C_1$$

2. $0 \le x \le a$:

$$\frac{d}{dx}D_{2x}(x) = \frac{x}{a} r_0 \qquad D_{2x}(x) = \frac{x^2}{2a} r_0 + C_2$$

3. $a \le x \le b$:

$$\frac{d}{dx}D_{3x}(x) = r_0 \qquad D_{3x}(x) = r_0 x + C_3$$

4. $b \le x \le \infty$:

$$\frac{d}{dx}D_{4x}(x) = 0 \qquad D_{4x}(x) = D_{4x} = C_4$$

Удобнее сначала использовать поведение поля на бесконечностях, а потом сшивать решения. Вы знаете, что индукция поля равномерно заряженной бесконечной плоскости с обеих ее сторон одинаково по величине и проекции отличаются только знаком. Вы также знаете принцип суперпозиции. Потому проекция поля вне этих пластин также будут отличаться только знаком. Можно представить заряженную по объему пластину из диэлектрика как набор пластин. Поэтому мы можем считать, что поля в областях 1 и 4 связаны уравнением:

$$D_{1x} = -D_{4x}$$

Из этого вытекает, что

$$C_4 = -C_1$$

Таким образом, нам осталось определить три произвольных постоянных интегрирования из трех граничных условий при $x = 0, a, b$:

$$D_{2x}(0) - D_{1x}(0) = s \qquad C_2 - C_1 = s$$

$$D_{3x}(a) = D_{2x}(a) \qquad r_0 a + C_3 = \frac{a}{2} r_0 + C_2$$

$$D_{4x}(b) = D_{3x}(b) \qquad -C_1 = r_0 b + C_3$$

Далее надо решить систему трех уравнений относительно неизвестных констант (правый столбик) и найденные решения подставить в найденные выше индукции полей для соответствующих областей. (Посмотрите на цвет моей кожи на фото). Чтобы найти напряженности полей, надо, определенные (вами!!!) индукции, разделить на $e_0 e(x)$ и умножить на единичный вектор $\boldsymbol{e}_x$:

$$\boldsymbol{E}_k = \frac{D_k(x)}{e_0 e_k(x)} \boldsymbol{e}_x$$

Проверка решения. Найдем полную «эффективную» поверхностную плотность заряда системы:

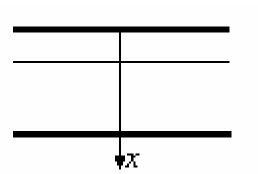
$$s_{эф} = s + \int_0^a r_1(x)dx + \int_a^b r_2(x)dx = s + \int_0^a \frac{x}{a} r_0 dx + \int_a^b r_0 dx = s + \frac{a}{2} r_0 + (b-a) r_0 = s + (b - \frac{a}{2}) r_0$$

Если нет ошибки в вычислениях, то индукция поля при $x \geq b$ должна быть равной $D_{4x} = \frac{s_{эф}}{2}$.

3. Конденсаторы. Энергия поля.

В этом разделе мы рассмотрим, как определять поле в заряженном конденсаторе с диэлектриком и некоторые энергетические характеристики. Начнем рассмотрение с плоского конденсатора с твердым неоднородным диэлектриком. Будем считать, что верхняя пластина заряжена зарядом $+q$, а нижняя зарядом $-q$. Верхняя часть конденсатора до тонкой черты не содержит диэлектрика ($e = 1$), ниже черты находится диэлектрик с $e = 1 + \frac{x}{a}$, где a - расстояние от верхней пластины до диэлектрика. Расстояние между пластинами $l = 4a$. Требуется найти емкость конденсатора, энергию поля, заключенного в нем, энергию поляризации диэлектрика, силу, действующую на верхнею пластину конденсатора.

Решение.



Начнем с индукции электрического поля, которая не зависит от наличия или отсутствия диэлектрика. Вам хорошо известно, что величина индукции между двумя бесконечными плоскостями, заряженными равномерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями $\pm s$ равна $D = s$. Следовательно, проекция индукции (см. рис.) равна:

$$D_x(x) = D_x = s = \frac{q}{S}$$

Из того, что мы используем формулы для бесконечных плоскостей для реального конденсатора, следует, что полученные решения будут приближенными и ошибка будет тем меньше, чем больше линейные размеры пластин по сравнению с расстоянием между ними.

Напряженность электрического поля в области $0 \leq x \leq a$ (начало координат совмещено с верхней пластиной), где диэлектрик отсутствует, будет также постоянна и равна:

$$E_x = \frac{D_x}{e_0} = \frac{q}{e_0 S}$$

В области $a \leq x \leq 4a$ из-за неоднородности диэлектрика напряженность поля будет изменяться по закону:

$$E_x(x) = \frac{q}{e_0 (1 + \frac{x}{a}) S}$$

Теперь можно вычислить разность потенциалов между пластинами, используя формулу, связывающую потенциал с напряженностью поля $\boldsymbol{E} = \nabla j$, которая для нашей одномерной задачи имеет вид $E_x = -\frac{dj}{dx}$. Находим разность потенциалов:

$$j(4a) - j(0) = -\frac{q}{e_0 S} a - \frac{q}{e_0 S} \int_a^{4a} \frac{dx}{1 + \frac{x}{a}} = -\frac{q}{e_0 S} a (1 + \ln \frac{1 + \frac{4a}{a}}{1 + \frac{a}{a}}) = -\frac{qa}{e_0 S} (1 + \ln 2{,}5)$$

Для вычисления емкости конденсатора воспользуемся известной вам формулой еще из школьного курса $C=\frac{q}{U}$. Но при такой записи можно сделать ошибку в знаке. Лучше пользоваться формулой;

$$C=\frac{q_1}{j_1-j_2}\equiv\frac{q_2}{j_2-j_1}$$

Из нее хорошо видно, *что в знаменателе на первом месте стоит потенциал той пластины, заряд которой стоит в числителе*. Таким образом, емкость нашего конденсатора равна:

$$C=\frac{e_0 S}{a(1+\ln 2,5)}$$

Энергию поля найдем, проинтегрировав плотность энергии по объему конденсатора:

$$W=\int_0^l\frac{E_x D_x}{2}Sdx=\int_0^a\frac{E_x D_x}{2}Sdx+\int_a^{4a}\frac{E_x D_x}{2}Sdx$$

Подставив полученные выше выражения для полей, получим:

$$W=\frac{q^2}{2e_0 S^2}aS+\frac{q^2}{2e_0 S^2}\int_a^{4a}\frac{Sdx}{1+\frac{x}{a}}=\frac{q^2 a}{2e_0 S}(1+\ln 2,5)$$

Полученное выражение можно проверить, используя формулу для энергии конденсатора:

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2 a(1+\ln 2,5)}{2e_0 S}$$

Как видите, результаты совпали. Еще раз советую: *делайте при возможности проверку, чтобы не решать лишние задачи на зачете.*

Энергия поляризации вычисляется по формуле:

$$W_p=\int_a^{4a}\frac{E_x P_x}{2}Sdx=\frac{1}{2}\int_a^{4a}E_x e_0(e-1)E_x Sdx=\frac{1}{2}\int_a^{4a}e_0(e-1)E_x^2 Sdx$$

$$W_p=\frac{1}{2}e_0 S\int_a^{4a}\frac{x}{a}\left(\frac{q}{e_0(1+\frac{x}{a})S}\right)^2dx=\frac{1}{2}\frac{q^2}{e_0 Sa}\int_a^{4a}\frac{xdx}{(1+\frac{x}{a})^2}=\frac{q^2 a}{2e_0 S}\int_1^4\frac{ydy}{(y+1)^2}$$

$$\int_1^4\frac{ydy}{(y+1)^2}=[\ln(y+1)+\frac{1}{y+1}]_1^4=\ln 2,5-0,3$$

Арифметику проверьте сами. Окончательно находим:

$$W_p=\frac{q^2 a}{2e_0 S}(\ln 2,5-0,3)$$

Осталось найти силу, действующую на верхнюю пластину конденсатора (поле тяжести в расчет не принимается). Внешне поле, в котором находится верхняя пластина, создается только нижней пластиной. Поле вне диэлектрика связанными зарядами не создается, так как суммарный заряд равен нулю. Между прочим, суммарная сила, действующая на диэлектрик, равна нулю по этой же причине. Поэтому силу найти совсем просто:

$$F_x=q\frac{s}{2e_0}=\frac{q^2}{2e_0 S}$$

Если раздвинуть пластины конденсатора на Δx, то работа сторонних сил будет равна:

$$A'=F_x\Delta x=\frac{q^2}{2e_0 S}\Delta x$$

Сравнивая с первым слагаемым для энергии поля, видно, что работа сторонних сил переходит в энергию поля добавочного объема конденсатора без диэлектрика.

Несколько замечаний к задачам со сферическими конденсаторами. Задач на них много, сферический (вакуумный) конденсатор «живьем» за всю жизнь видел один раз в высокочастотной установке. Но раз задачи есть, то нужны и советы по их решению.

Если в сферическом конденсаторе геометрия диэлектрика и его свойства имеют сферическую симметрию, то формально все выражения рассмотренной задачи остаются применимыми с заменой буквы x на r. При взятии интеграла по объему конденсатора надо Sdx заменить на $4p\,r^2dr$. Из-за таких мелочей не имеет смысла рассматривать отдельную задачу. Однако *следует рассмотреть некоторое отличие, если конденсатор находится в (строго говоря, в бесконечном) жидком или газообразном диэлектрике*.

Предположим, что рассмотренный выше плоский конденсатор погружен в жидкий диэлектрик, то есть в области $0 \le x \le a$ теперь не вакуум, а жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью равной $e_1 > 1$. Конечно можно повторить все выкладки, подставив e_1 во все формулы, относящиеся к этой области вместо единицы. Но это простая работа и вы без труда сделаете сами. За исключением одного – вычисления силы, действующей на верхнею пластину. Сила, вычисленная ранее по формуле

$$F_x = q\frac{s}{2e_0} = \frac{q^2}{2e_0S}$$

представляет собой электростатическую силу, действующую на верхнею пластину со стороны нижней. Но на пластину еще действует сила давления жидкости, так как давление внутри конденсатора больше, чем давление вне конденсатора. Объяснить это качественно достаточно просто. Помните, при рассмотрении задач с элементарными диполями, в самом конце было сказано: «Этот результат нам понадобиться при рассмотрении заряженных конденсаторов, находящихся в жидком или газообразном диэлектрике»? Напомню. Речь шла о том, что в поле диполя другие диполи стараются ориентироваться по полю, а затем на них начинает действовать сила притяжения к диполю, создающего поле. На расстояниях много болше размеров конденсатора его поле является полем диполя с дипольным моментом $p = ql$. На сравнимых расстояниях мы не сумеем рассчитать поле, но в нем также диполи будут притягиваться к конденсатору. Поэтому молекулы жидкого или газообразного диэлектрика поляризуются (если он состоит из неполярных молекул) и начинают притягиваться к конденсатору, что и создает избыточное давление в нем. Избыточную силу давления можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии. Рассчитаем ее для нашей задачи.

Энергия поля объема конденсатора, занятого жидким или газообразным диэлектриком равна:

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{s}{e_0e_1}s\,Sa = \frac{q^2}{2e_0e_1S}a$$

Чтобы найти силу, надо толщину слоя считать переменной величиной, которую мы переобозначим z, а саму ось z направим вверх против оси x, причем начало координат поместим на границе диэлектриков. При таком выборе:

$$W_1 = \frac{q^2}{2e_0e_1S}z \qquad F_z = -\frac{dW_1}{dz} = -\frac{q^2}{2e_0e_1S}$$

Таким образом, к пластине надо приложить $F_z' = -F_z$, чтобы раздвинуть пластины. Эта сила равна электростатической силе, которую надо «преодолеть», за минусом силы давления, которая «помогает» раздвигать пластины:

$$\frac{q^2}{e_0e_1S} = \frac{q^2}{e_0S} - F_{давл} \qquad F_{давл} = \frac{q^2}{e_0S} - \frac{q^2}{e_0e_1S} = \frac{q^2}{e_0S}\frac{e_1-1}{e_1}$$

На этом мы и закончим решение «обязательных» задач по электростатике.